كلية العلوم — الفصل الأول للعام 2014/ 2015 — الدرجة : 100

قسم الرياضيات — السنة الثالثة - رياضيات — المدة : 90 دقيقة

أجب عن الأسئلة التالية مع مراعاة الترتيب في ورقتك : (تمنع الآلة الحاسبة)

(من 1 الى 7 لكل سؤال (12 درجة) و للسؤال الثامن (16 درجة)

1) أثبت أن للدالة f المستمرة مطلقاً على $[a,b]$ هي ذ ت م عليها ، وهل العكس صحيح ، وضح ذلك بمثال ؟ بدون حل.

2) أوجد دالة التغير للدالة $g(x)=\dfrac{1}{1+x}$ على الفترة $[0,3]$ ، ثم حقق من أجل g شرط ليبشيتز و ارسمها على نفس الفترة، مع ذكر خاصة الاستمرار لدالة التغير على $[0,3]$.

3) اكتب صيغة دالة القفز على $[a,b]$ لدالة h متزايدة عليها وهل هي قيوسة على نفس الفترة و لماذا ؟ و ما نوع الفرق : $h(x)-J_h(x)$ من حيث الاستمرار بانتظام على $[a,b]$.

4) خذ $X=\{1,2,3,4\}$ و الصف $H=\{\Phi, X, \{1\}, \{3\}, \{1,3\}\}$ ، مع تبيان فيما إذا كان الصف H - تبولوجيا- جبر على X ، ثم أوجد أصغر جبر يحوي H . و علل هل الأخير جبر تام و صف مطرد ؟

5) تأكد من وجود تكامل ستيلجس: $J=\int_0^3 |x+1|\,d\,[v_g(x)]$ و أحسبه في حال و جوده، حيث الدالة $v_g(x)$ هي دالة التغير التي أوجدتها ، في السؤال (2) أعلاه ، ثم بين أن الدالة $u(x)=|x|$ اشتقاقية تقريباً في كل مكان على الفترة $[-2,2]$.

6) لتكن $X=R$ ، $S=B(R)$ ، μ قياس ليبيغ على R و $F_n=[n+1,\infty[_{n\geq 1}$ ما هو الشرط الواجب إضافته لتتحقق العلاقة: $\mu(\bigcap F_n)=\lim_{n\to\infty}\mu(F_n)$ بعد إيجاد طرفيها ؟ و ماذا تسمى هذه الخاصة بالنسبة للقياس μ ؟

7) احسب تكامل ليبيغ للدالة الثابتة: $w(x)=C$ على المجموعة : $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{1}{n+1};\frac{1}{n}\right[\right\}$ بعد التأكد من وجوده و ما هو التغير الكلي للدالة الثابتة على فترة مثل $[-1,10]$ ؟ .

8) أكمل ما يلي (بدون حلول):

$$a)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}=\dots;\ p\neq 1\ ,\ b)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=\dots\ ,\ c)\overset{1}{\underset{0}{V}}(\varphi)=\dots$$

$$d)\overset{1}{\underset{0}{V}}(|\varphi|)=\dots\ ,\ e)\ J=(S)\int_a^b f(x)\,d\,g(x)=\dots$$

حيث φ دالة ديريخليه على $[0,1]$ و المعرفة بالشكل :

$$\varphi(x)=\begin{cases}1; & x\in[0,1]\cap\tilde{Q}\\ -1; & x\in[0,1]\cap Q\end{cases}$$

حيث الدالة g تأخذ قيماً ثابتة على الفترة $[a,b]$ و f مستمرة عليها .

------------------------------ انتهت الأسئلة ------------------------------

مدرس المقرر: د.محمد عامر — حمص في 2015/2/12

توزيع درجات مقرر الدوال الحقيقية

كلية العلوم
قسم الرياضيات

الامتحان: الفصل الأول $\frac{2014}{2015}$

السنة الثالثة - رياضيات

الدرجة: 100

س١ (36 د)

(١) إثبات أن الدالة f المطلقة الاتصال على $[a,b]$: لتكن $\varepsilon = 1$ ، يوجد $\delta > 0$

لكل عائلة منتهية من الفترات الجزئية المنفصلة $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{n}$ بحيث $\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$

$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < 1$. نأخذ التجزئة $P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_N = b\}$ على $[a,b]$ ،

12

$k = 1, 2, \dots, N$; $x_k - x_{k-1} < \delta$ ، عندئذٍ نستنتج أن التجزئة P_k للفترة $[x_{k-1}, x_k]$ تحقق $V(f, P_k) \le 1$

$\overset{x_k}{\underset{x_{k-1}}{V}}(f) \le 1 \; ; \; k = 1, 2, \dots, N$ ، وبالتالي

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \sum_{k=1}^{N} \overset{x_k}{\underset{x_{k-1}}{V}}(f) \le \sum_{k=1}^{N} 1 = N < \infty$$

[illegible] f ذات تغير محدود على $[a,b]$.

- لا، العكس ليس صحيحاً، مثلاً دالة الصحيح $y = [x]$ ذات تغير محدود على أي فترة $[a,b]$ ولكنها ليست مطلقة الاتصال لأنها غير متصلة على $[a,b]$

(٢) إيجاد دالة التغير للدالة $g(x) = \frac{1}{1+x}$ على $[0,3]$ ؛ [illegible] g متناقصة على $[0,x]$

لأن g متناقصة [illegible] إيجاد دالة التغير لها:

$$\overset{x}{\underset{0}{V}}(g) = f(0) - f(x) \; ; \; 0 < x \le 3$$

$$= 1 - \frac{1}{1+x}$$

12

وعليه فإن

$$v(x) = \overset{x}{\underset{0}{V}}(g) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{1+x} & ; \; 0 < x \le 3 \\ 0 & ; \; x = 0 \end{cases}$$

- g ذات تغير محدود على $[0,3]$ [illegible]
- [illegible] (g)

$$|g(x) - g(y)| = \left| \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y} \right| = \left| \frac{y-x}{(1+x)(1+y)} \right| \le \frac{1}{1 \times 1} |x-y| = |x-y|$$

$; \; x, y \in [0,3]$

الرسم

- الرسم
- [illegible] g [illegible] على $[0,3]$

[illegible] على $[0,3]$ [illegible]

(3) [illegible] دالة القفز. لتكن h دالة متزايدة على $[a,b]$ [illegible]

$$d_h(x) = \begin{cases} 0 & ; \; x = a \\ [f(a+0) - f(a)] + \sum_{x_k < x} [f(x_k+0) - f(x_k-0)] + [f(x) - f(x-0)] & ; \; a < x \le b \end{cases}$$

12

[illegible] h على $[a,b]$

(1)

يتبع

(2)

وبما أن $\underline{\int}_a^{x}$ متزايدة في $[a,b]$ وبالتالي ذات تغير محدود [illegible]
وبالتالي [illegible] $\varphi(x) = h(x) - \underline{\int}_a^{x}$ [illegible] $[a,b]$ [illegible] $[a,b]$.

س 2 (36 د)

(4) لدينا هنا $X=\{1,\dots,4\}$ والصف $H=\{\phi, X, \{1\}, \{3\}, \{1,3\}\}$

نجد هنا أن H ليست جبراً [illegible] $\forall X$ [illegible]

$\{1\}^c = X-\{1\} = \{2,3,4\} \notin H$

وأصغر جبر يحوي H

$H_1 = \{\phi, X, \{1\}, \{2,3,4\}, \{3\}, \{1,2,4\}, \{1,3\}, \{2,4\}\}$

وذلك لأنه يحقق شروط الجبر المعرفة على X.

*) [illegible] لأن X [illegible] منتهية [illegible]

12

(5) [illegible] $f(x)=|x+1|=x+1$ في الفترة $[0,3]$ [illegible]
[illegible] $\varphi_g(x)$ [illegible] $[0,3]$ [illegible]
[illegible]

$$\delta=\int_0^3 f\, d\varphi_g(x) = \int_0^3 f(x)\,\varphi_g'(x)\,dx = \int_0^3 (x+1)\,\frac{dx}{(x+1)^2} = \Big[\ln(x+1)\Big]_0^3 = \ln(4)$$

*) [illegible] $u(x)$ [illegible] $[-2,2]$ [illegible]
[illegible] $[-2,2]-\{0\}$ [illegible] $[-2,2]$ [illegible] $\{0\}$ [illegible]

12

(6) لدينا $X=\mathbb{R}$ و $S=\beta(\mathbb{R})$ [illegible] $\mathbb{R}$ [illegible] $\mathbb{R}$،

[illegible] $\mu(F)<\infty$ [illegible] $\mu(F_n)<\infty$ [illegible]
[illegible] F_n [illegible] $F_n \supseteq F_{n+1}$ [illegible]

$\{F_n\}$ [illegible] $F = \{\phi\}$ و $\lim_{n\to\infty}\mu(F_n)=\infty$

[illegible] $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n)=\mu(\{\phi\})=0$ [illegible] $\mu(F_n)<\infty$

*) [illegible]

12

يتبع ← (2)

ج) 28 (1

(7) تكامل لبيغ : [illegible] W [illegible]

المجموعة E [illegible]

[illegible]

$\lambda(E)=1$ [illegible]

[illegible] E [illegible]

(12)

$$I = (L)\int_{E} W(x)\,d\lambda = c\int_{E} d\lambda = c\,\lambda(E) = c \times 1 = c$$

(8) [illegible] $[-1,10]$.

(16)

a) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} \overset{(p\neq 1)}{=} \frac{1}{n^{p-1}} + p\int_{1}^{n} \frac{[x]}{x^{p+1}}\,dx \quad (p=1)$$

b) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n - \int_{1}^{n} \frac{x-[x]}{x^2} + 1$$

c) $\overset{1}{\underset{0}{V}}(\varphi) = \infty$, d) $\overset{1}{\underset{0}{V}}(|\varphi|) = 0$

حيث φ دالة دريكليه على $[0,1]$.

e) $$J = (S)\int_{a}^{b} f(x)\,dg(x) = f(a)\,[g(a+0)-g(a)] + \sum_{k=1}^{m} f(c_k)\,[g(c_k+0)-g(c_k-0)] + f(b)\,[g(b)-g(b-0)]$$

[illegible] $[a,b]$.

أستاذ المادة
د. [illegible]

[illegible]

[illegible] ٢٠١٥/٦/٢

(3)

جامعة البعث | امتحان مقرر الدوال محدودة التغير | اسم الطالب:
كلية العلوم | الفصل الدراسي الأول ٢٠٠٩/٢٠١٠ | الدرجة: ٨٠
قسم الرياضيات | السنة الثالثة - رياضيات | المدة: ساعتان

السؤال الأول (٢٠ درجة): (أ) - لتكن f دالة مستمرة و g دالة محدودة التغير على الفترة $[a,b]$، و لنضع

$$F(x) := \int_a^x f(t)dg(t) \quad ; \quad x \in [a,b],$$ و المطلوب:

(١). أثبت أن الدالة F محدودة التغير على الفترة $[a,b]$.

(٢). إذا كانت الدالة g مستمرة في النقطة $x = x_0$، فبين أن الدالة F تكون كذلك.

(ب). أذكر مثالاً عن دالة تحقق شرط ليبشتز على فترة مغلقة و محدودة، بحيث تكون فيه مستمرة مطلقاً و قابلة للمكاملة لوبيغياً على تلك الفترة، مع ذكر الحل فقط لتحقق الشرط على الفترة المذكورة.

السؤال الثاني (٢٠ درجة): (أ). لتكن لدينا الدالة:

$$\psi(x) = \begin{cases} x^2 & ; \quad 0 \le x < 1 \\ 5 & ; \quad x = 1 \\ x+3 & ; \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$$

و المطلوب:

(١). اكتب هذه الدالة على شكل فرق دالتين متزايدتين على الفترة $[0,2]$.

(٢). إذا كانت $f_1(x) = e^x$ معرفة على $[0,2]$، فاحسب قيمة التكامل $(S)\int_0^2 f_1(x)d\psi(x)$ بعد التأكد من وجوده.

(ب). أثبت إذا كانت الدالة f مستمرة تقريبياً في كل مكان على المجموعة E، فإن f تكون قيوسة على E.

السؤال الثالث (٢٠ درجة): (أ). لتكن f دالة حقيقية معرفة على الفترة $[0,1]$ بالشكل:

$$f(x) = 0;\ x \in \left[0, \tfrac{1}{2}\right[, f(x) = \tfrac{1}{2};\ x \in \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}\right[, f(x) = \tfrac{3}{4};\ x \in \left[\tfrac{3}{4}, \tfrac{7}{8}\right[, \ldots, f(x) = 1;\ x = 1$$

بين أن لهذه الدالة المتزايدة قفزة عند كل نقطة: $x_k = 1 - \frac{1}{2^k};(k \ge 1)$ تساوي $\frac{1}{2^k}$، ثم احسب:

$$\sum_{k=1}^{\infty}[f(x_k+0) - f(x_k-0)].$$

(ب). لتكن المجموعة $X = \{1,2,3,\ldots\}$ وليكن الجبر التام $S = \mathcal{P}(X)$، و لنضع

$\mu(A) = \sum_{n \in A}\frac{1}{n^2};A \in S$، $\mu(\phi) = 0$. اثبت أن μ تعرف قياساً على S، وهل هو منته؟ مع التعليل.

السؤال الرابع (٢٠ درجة): لتعرف الدالة f بالشكل: $f(x) = x^2[1-\varphi(x)]; x \in [2,5] = E$ حيث φ دالة ديريخليه على الفترة E، والمطلوب:

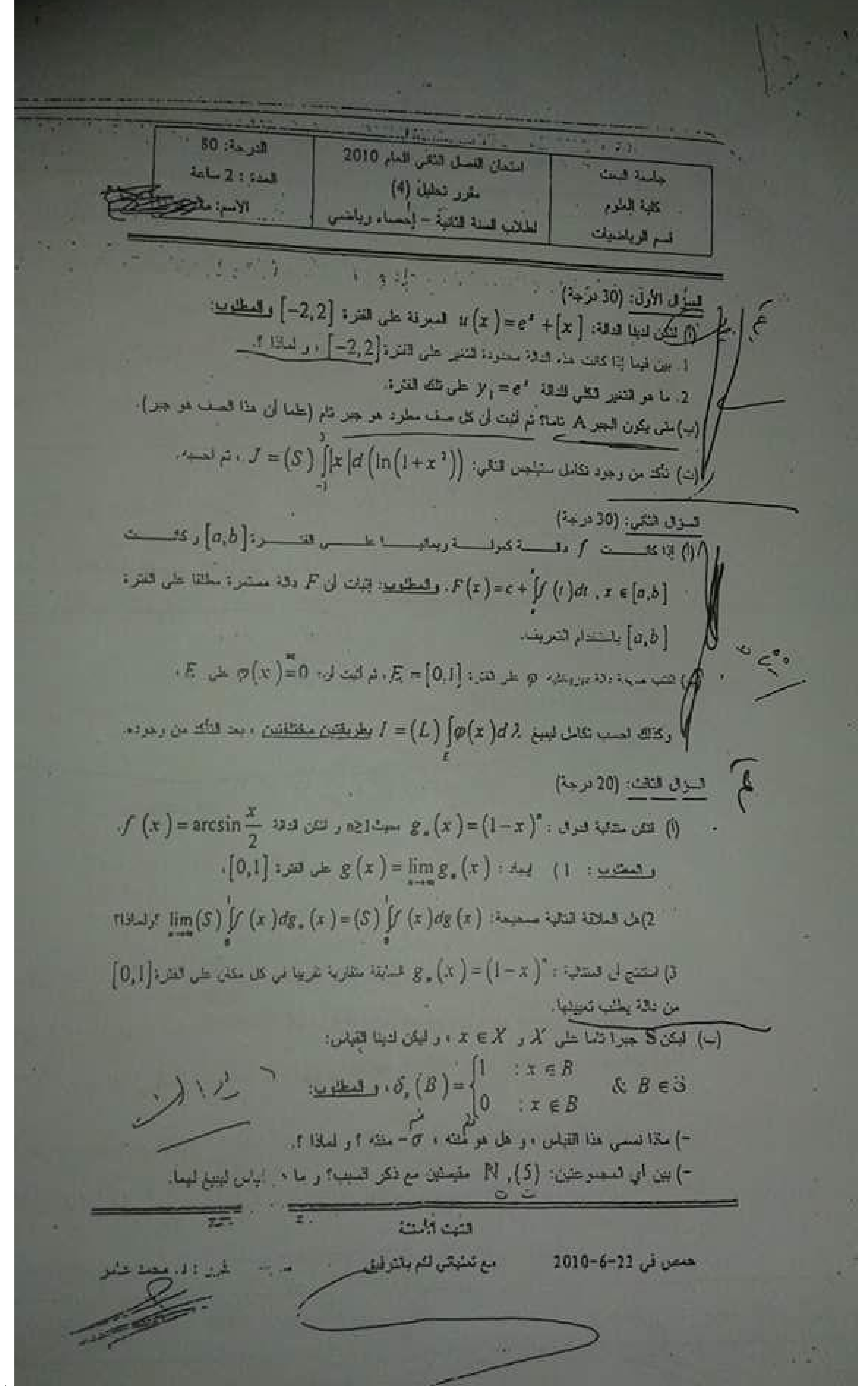
(١). هل الدالة $h(x) = 1 - \varphi(x)$ مكمولة حسب ستيلتجس بالنسبة لدالة $g(x) = 2x$ على الفترة $E = [2,5]$، ولماذا؟

(٢). أثبت أن دالة ديريخليه تساوي الصفر تقريباً في كل مكان على الفترة E،

(٣). تأكد من وجود التكامل: $(L)\int_E f(x)d\lambda$، ثم احسب قيمته في حال وجوده.

انتهت الأسئلة

حمص في ٢٠١٠/١/١٧ — مع تمنياتي بالتوفيق و النجاح — مدرس المقرر د.محمد عامر



جامعة البعث كلية العلوم قسم الرياضيات	امتحان الفصل الثاني للعام 2010 مقرر تحليل (4) لطلاب السنة الثانية – إحصاء رياضي	الدرجة: 80 المدة: 2 ساعة الاسم:

السؤال الأول: (30 درجة)

(أ) لتكن لدينا الدالة: $u(x)=e^{x}+[x]$ المعرفة على الفترة $[-2,2]$ والمطلوب:

1. بين فيما إذا كانت هذه الدالة محدودة التغير على الفترة $[-2,2]$، و لماذا ؟

2. ما هو التغير الكلي للدالة $y_1=e^{x}$ على تلك الفترة.

(ب) متى يكون الجبر A تاماً؟ ثم أثبت أن كل صف مطرد هو جبر تام (علماً أن هذا الصف هو جبر).

(ت) تأكد من وجود تكامل ستيلجس التالي: $J=(S)\int_{-1}^{3}|x|\,d\left(\ln\left(1+x^{2}\right)\right)$، ثم احسبه.

السؤال الثاني: (30 درجة)

(أ) إذا كانت f دالة كمولة ريمانياً على الفترة: $[a,b]$ وكانت $F(x)=c+\int_{a}^{x}f(t)\,dt\ ,\ x\in[a,b]$. والمطلوب: إثبات أن F دالة مستمرة مطلقاً على الفترة $[a,b]$ باستخدام التعريف.

(ب) اكتب صيغة دالة ديريخليه φ على الفترة: $E=[0,1]$، ثم أثبت أن: $\varphi(x)\overset{a.e.}{=}0$ على E،

وكذلك احسب تكامل ليبيغ $I=(L)\int_{E}\varphi(x)\,d\lambda$ بطريقتين مختلفتين، بعد التأكد من وجوده.

السؤال الثالث: (20 درجة)

(أ) لتكن متتالية الدوال: $g_n(x)=(1-x)^{n}$ بحيث $n\geq1$ و لتكن الدالة $f(x)=\arcsin\dfrac{x}{2}$.

والمطلوب: 1) أوجد: $g(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}g_n(x)$ على الفترة: $[0,1]$.

2) هل العلاقة التالية صحيحة: $\lim\limits_{n\to+\infty}(S)\int_{0}^{1}f(x)\,dg_n(x)=(S)\int_{0}^{1}f(x)\,dg(x)$ و لماذا؟

3) استنتج أن المتتالية: $g_n(x)=(1-x)^{n}$ السابقة متقاربة تقريباً في كل مكان على الفترة $[0,1]$ من دالة يطلب تعيينها.

(ب) لتكن S جبراً تاماً على X و $x\in X$، و ليكن لدينا القياس:

$$\delta_x(B)=\begin{cases}1 & : x\in B\\ 0 & : x\in B\end{cases}\quad \& \ B\in S$$

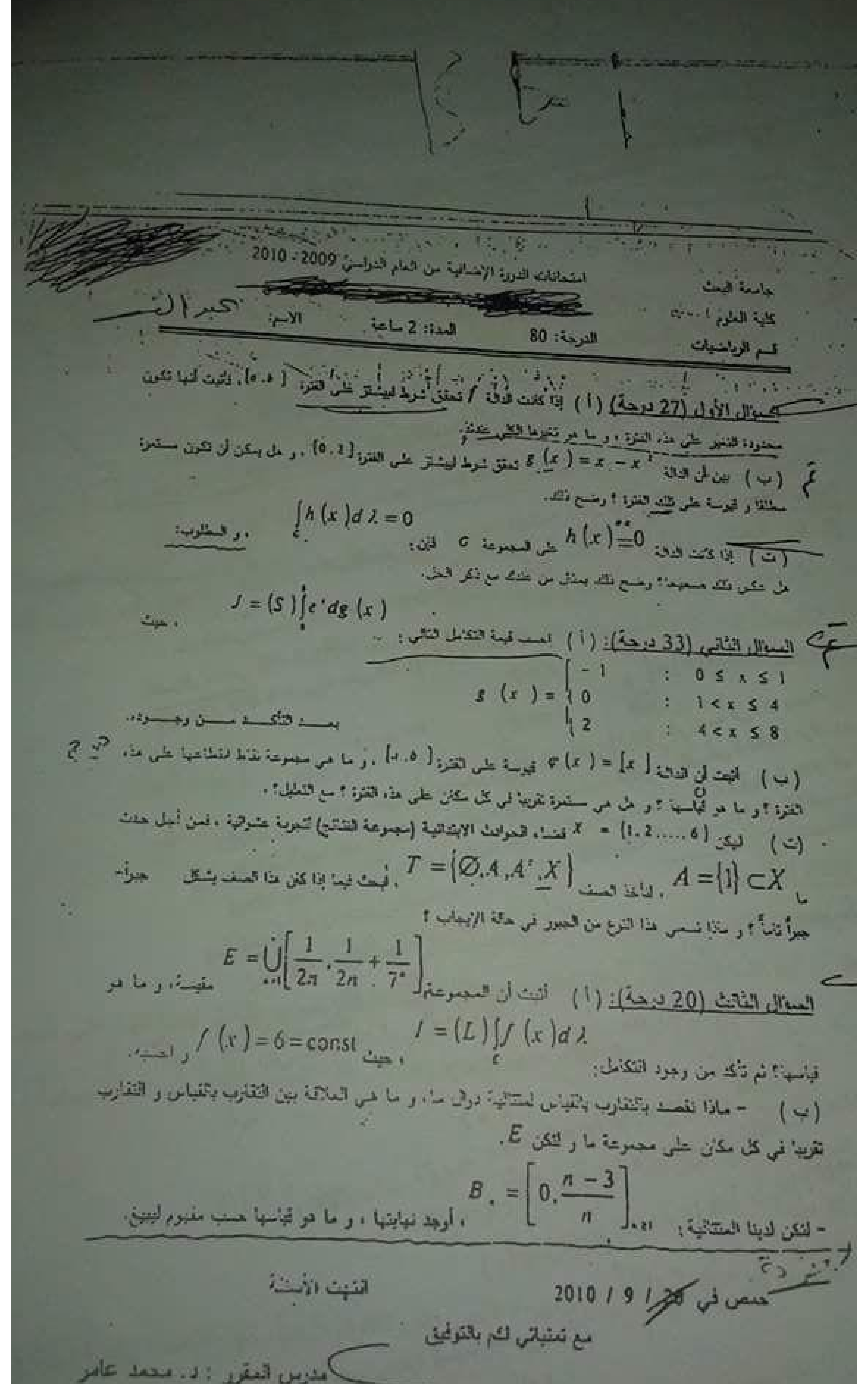
والمطلوب:

-) ماذا نسمي هذا القياس، و هل هو منته، σ- منته ؟ و لماذا ؟.

-) بين أي المجموعتين: $\{5\}$, $\mathbb{N}$ مقيستين مع ذكر السبب؟ و ما قياس ليبيغ لهما.

انتهت الأسئلة

حمص في 2010-6-22 — مع تمنياتي لكم بالتوفيق — المدرس: د. محمد خاطر



جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الدورة الإضافية من العام الدراسي 2009 - 2010

[redacted]

الاسم:　　المدة: 2 ساعة　　الدرجة: 80

السؤال الأول (27 درجة) (أ) إذا كانت الدالة f تحقق شرط ليبشتز على الفترة [a,b]، فأثبت أنها تكون محدودة التغير على هذه الفترة، و ما هو تغيرها الكلي عندئذ؟

(ب) بين أن الدالة $g(x) = x - x^2$ تحقق شرط ليبشتز على الفترة [0,2]، و هل يمكن أن تكون مستمرة مطلقاً و قيوسة على تلك الفترة؟ وضح ذلك.

(ت) إذا كانت الدالة $h(x) \overset{a.e}{=} 0$ على المجموعة G فإن: $\int_G h(x)\,d\lambda = 0$، و المطلوب:

هل عكس ذلك صحيح؟ وضح ذلك بمثال من عندك مع ذكر الحل.

السؤال الثاني (33 درجة): (أ) احسب قيمة التكامل التالي: $J = (S)\int_0^8 e^x\,dg(x)$، حيث

$$g(x) = \begin{cases} -1 & : 0 \le x \le 1 \\ 0 & : 1 < x \le 4 \\ 2 & : 4 < x \le 8 \end{cases}$$

بعد التأكد من وجوده.

(ب) أثبت أن الدالة $\varphi(x) = [x]$ قيوسة على الفترة [0,5]، و ما هي مجموعة نقاط انقطاعها على هذه الفترة؟ و ما هو قياسها؟ و هل هي مستمرة تقريباً في كل مكان على هذه الفترة؟ مع التعليل؟

(ت) ليكن $X = \{1,2,\dots,6\}$ فضاء الحوادث الابتدائية (مجموعة النتائج) لتجربة عشوائية، فمن أجل حدث ما $A = \{1\} \subset X$، لنأخذ الصف $T = \{\emptyset, A, A', X\}$، ابحث فيما إذا كان هذا الصف يشكل جبراً، جبراً تاماً؟ و ماذا نسمي هذا النوع من الجبور في حالة الإيجاب؟

السؤال الثالث (20 درجة): (أ) أثبت أن المجموعة $E = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n} + \frac{1}{7^n}\right]$ مقيسة، و ما هو قياسها؟ ثم تأكد من وجود التكامل: $J = (L)\int_E f(x)\,d\lambda$، حيث $f(x) = 6 = const$ و احسبه.

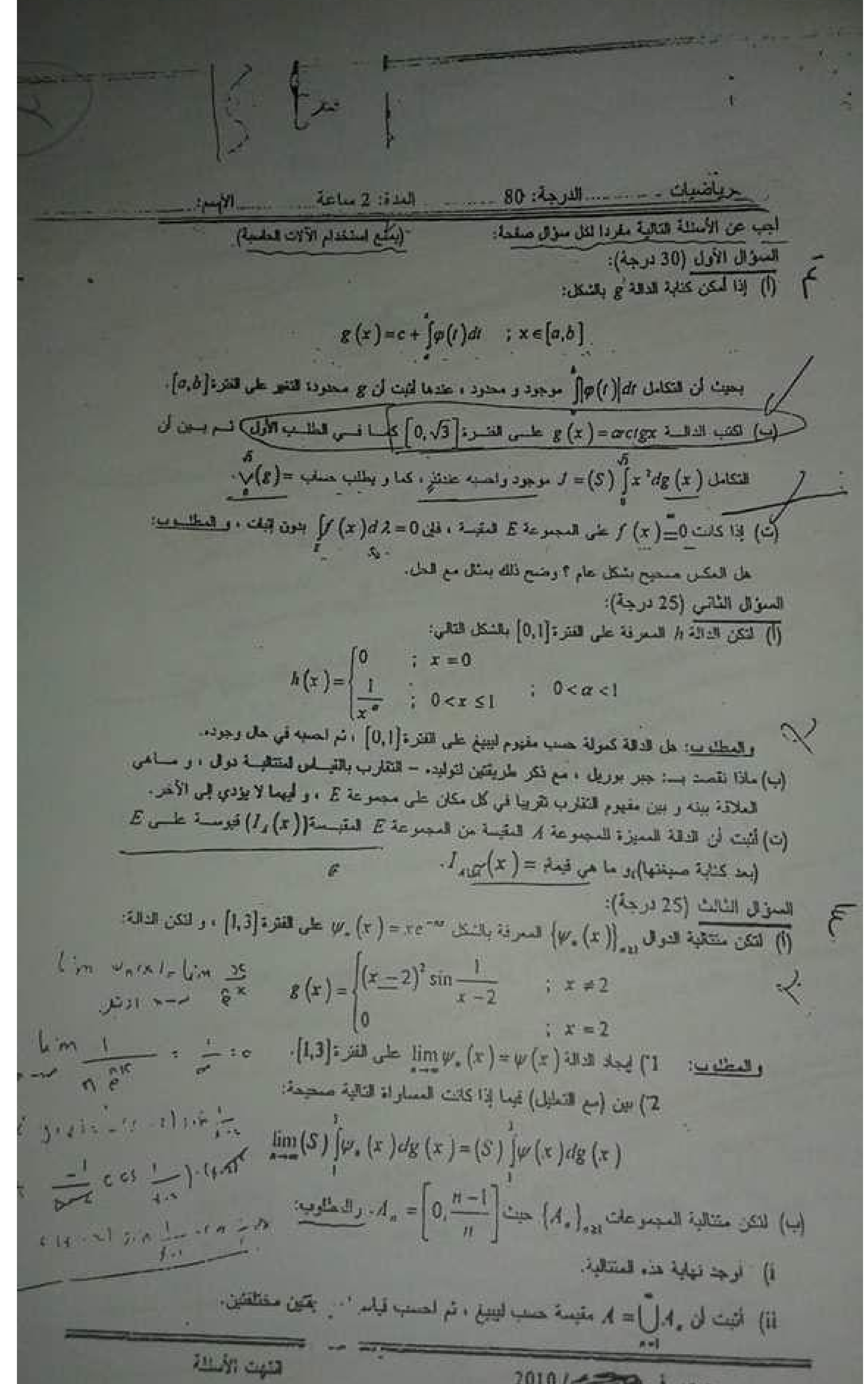
(ب) - ماذا نقصد بالتقارب بالقياس لمتتالية دوال ما، و ما هي العلاقة بين التقارب بالقياس و التقارب تقريباً في كل مكان على مجموعة ما و لتكن E.

- لتكن لدينا المتتالية: $B_n = \left[0, \frac{n-3}{n}\right]_{n \ge 1}$، أوجد نهايتها، و ما هو قياسها حسب مفهوم لبيغ.

حمص في 1 / 9 / 2010　　انتهت الأسئلة

مع تمنياتي لكم بالتوفيق

مدرس المقرر: د. محمد عامر



رياضيات .... الدرجة: 80 .... المدة: 2 ساعة .... الاسم: ....

اجب عن الأسئلة التالية مفردا لكل سؤال صفحة: (يمنع استخدام الآلات الحاسبة)

السؤال الأول (30 درجة):

(أ) إذا أمكن كتابة الدالة g بالشكل:

$$g(x)=c+\int_a^x \varphi(t)dt \quad ; x\in[a,b]$$

بحيث أن التكامل $\int_a^b|\varphi(t)|dt$ موجود و محدود ، عندها أثبت أن g محدودة التغير على الفترة $[a,b]$.

(ب) اكتب الدالة $g(x)=arctgx$ على الفترة $[0,\sqrt{3}]$ كما في الطلب الأول ثم بين أن التكامل $J=(S)\int_0^{\sqrt{3}}x^2dg(x)$ موجود واحسبه عندئذ ، كما و يطلب حساب $\bigvee_0^{\sqrt{3}}(g)=$

(ت) إذا كانت $f(x)\overset{-}{=}0$ على المجموعة E المقيسة ، فإن $\int_E f(x)d\lambda=0$ بدون إثبات ، و المطلوب:
هل العكس صحيح بشكل عام؟ وضح ذلك بمثال مع الحل.

السؤال الثاني (25 درجة):

(أ) لتكن الدالة h المعرفة على الفترة $[0,1]$ بالشكل التالي:

$$h(x)=\begin{cases}0 & ; x=0\\ \dfrac{1}{x^{\alpha}} & ; 0<x\le 1\end{cases} \quad ; 0<\alpha<1$$

والمطلوب: هل الدالة كمولة حسب مفهوم لبيغ على الفترة $[0,1]$ ، ثم احسبه في حال وجوده.

(ب) ماذا نقصد بـ: جبر بوريل ، مع ذكر طريقتين لتوليده. - التقارب بالقياس لمتتالية دوال ، و ما هي العلاقة بينه و بين مفهوم التقارب تقريبا في كل مكان على مجموعة E ، و أيهما لا يؤدي إلى الآخر.

(ت) أثبت أن الدالة المميزة للمجموعة A المقيسة من المجموعة E المقيسة $(I_A(x))$ قيوسة على E (بعد كتابة صيغتها)، و ما هي قيمة $I_{A\cap\bar{A}}(x)=$.

السؤال الثالث (25 درجة):

(أ) لتكن متتالية الدوال $\{\psi_n(x)\}_{n\ge1}$ المعرفة بالشكل $\psi_n(x)=xe^{-nx}$ على الفترة $[1,3]$ ، و لتكن الدالة:

$$g(x)=\begin{cases}(x-2)^2\sin\dfrac{1}{x-2} & ; x\neq 2\\ 0 & ; x=2\end{cases}$$

والمطلوب: 1) إيجاد الدالة $\lim_{n\to\infty}\psi_n(x)=\psi(x)$ على الفترة $[1,3]$.

2) بين (مع التعليل) فيما إذا كانت المساواة التالية صحيحة:

$$\lim_{n\to\infty}(S)\int_1^3\psi_n(x)dg(x)=(S)\int_1^3\psi(x)dg(x)$$

(ب) لتكن متتالية المجموعات $\{A_n\}_{n\ge1}$ حيث $A_n=\left[0,\frac{n-1}{n}\right]$ ، والمطلوب:

i) أوجد نهاية هذه المتتالية.

ii) أثبت أن $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ مقيسة حسب لبيغ ، ثم احسب قياسها بطريقتين مختلفتين.

انتهت الأسئلة

2010/

x $[0,2]$ $x \to x^2$

x^2 $[0,2]$

جامعة البعث	امتحان مقرر الدوال محدودة التغير	اسم الطالب :
كلية العلوم	الدورة التكميلية للعام ٢٠١١/٢٠١٢	الدرجة : 100
قسم الرياضيات	السنة الثالثة - رياضيات	المدة : ساعتان

أجب عن الأسئلة التالية

السؤال الأول: (أ) – أي الدوال التالية د ت م مع التعليل :

$f_1(x) = \tan x \; ; x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ ، $f_2(x) = e^{-x} ; x \in [0, -\infty[$

$f_3(x) = \frac{3}{2x} ; x \in [1, 8]$

ثم احسب التغير الكلي للدالة f_1 على نفس الفترة فقط .

(ب) – أثبت أنه إ ذا حققت الدالة f شرط ليبشتز على الفترة $[a,b]$ فتكون د ت م على هذه الفترة مع ذكر تغيرها الكلي عليها ، ثم طبق ذلك على الدالة : $f(x) = \sin x$ على الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(ج) – اكتب مجموعة مغلقة و أخرى مفتوحة على أن تكون بوريليتين و مقيسة و ما هو قياس كل منها ، ثم اذكر صفين يولدان جبر بوريل .

السؤال الثاني: (أ) – بين متى تكون العلاقة التالية : $\lim_{n\to\infty} (S)\int_0^1 f_n(x)\, dg(x) = (S)\int_0^1 f\, dg$

صحيحة ، إذا فرضنا أن $f_n(x) = x^n ; x \in [0,1]$ ، $g(x) = \begin{cases} 0 ; x = 0 \\ x^2 \sin\frac{1}{x} ; 0 < x \leq 1 \end{cases}$

بعد إيجاد الدالة: $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ على الفترة $[0,1]$

(ب) – أثبت أن المجموعة : $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{3^n}, \frac{1}{3^n} + \frac{1}{6^n}\right]$ مقيسة حسب ليبيغ و أحسب قياسها .

(ج) – اكتب صيغة دالة ديريخليه على الفترة $\left]\sqrt{2}, 5\right[$ ، ثم أثبت أنها دالة قيوسة على تلك الفترة.

السؤال الثالث: (أ) – احسب التكامل التالي: $J = (S)\int_0^3 x^2\, d(x^2 - [x])$ بعد التأكد من وجوده .

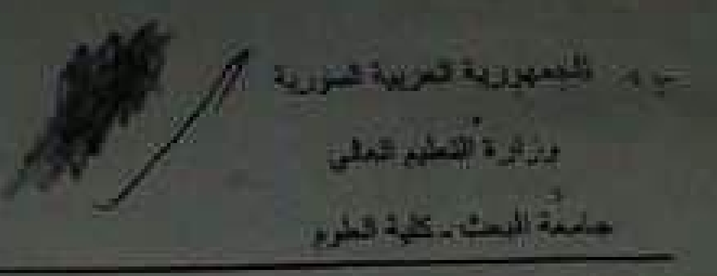
(ب) – إذا كانت $\mu^*(E) = 0$ ، فإن E مجموعة مقيسة بالنسبة لـ μ^* .

(ج) – أوجد دالة التغير للدالة $h(x) = \ln x$ على الفترة $[1,4]$ ، وهل الدالة الناتجة متزايدة و محدودة على نفس الفترة مع تبرير أقوالك عندئذ .

انتهت الأسئلة

حمص في ٢٠١٢/١٢/٥ مع تمنياتي بالتوفيق و النجاح مدرس المقرر

د. محمد عامر



الجمهورية العربية السورية — امتحان مقرر التوابع محدودة التغير — الاسم والرقم

وزارة التعليم العالي — الفصل الثاني – سنة ثالثة / رياضيات — الدرجة: 100

جامعة البعث - كلية العلوم — العام الدراسي (2012 - 2013) — مدة الامتحان: ساعتان

أجب عن السؤالين التاليين :

السؤال الأول (50 درجة) :

(أ) إذا كان للدالة f مشتقاً موجباً ومحدوداً على الفترة $[a,b]$ ، فاثبت أن هذه الدالة تكون ذ ت م ومتزايدة أيضاً على هذه الفترة.

(ب) أكمل النتيجة القائلة ((بفرض أن f دالة اشتقاقية على $[a,b]$ – ربما باستثناء عدد محدود من نقاط هذه الفترة ....)) وماهي عبارة التغير الكلي هنا للدالة f.

- طبق ذلك من أجل الدالة $f(x) = \sin x$ على الفترة $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ مع حساب تغيرها الكلي على هذه الفترة.

(ت) إذا كانت الدالتان f و g حيث الأولى f مستمرة والثانية g مستمرة و ذ ت م على الفترة $[a,b]$ ، فاثبت أن الدالة :

$$F(x) = \int_a^x f(u)dg(u) \quad ;x \in [a,b] \ ,F(a) = 0$$

ذ ت م على $[a,b]$ ، ثم أنها قويمة على تلك الفترة.

(ث) اختر تجزئة مناسبة للفترة $[0,2]$ ، بحيث تكون الدالة :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ;x = 0 \\ x^2 \sin\frac{\pi}{x^2} & ;0 < x \le 2 \end{cases}$$

ليست ذ ت م على هذه الفترة بدون حل ، وهل يمكن أن تكون هذه الدالة مستمرة مطلقاً ومنحنيها قابل للتقويم على $[0,2]$ ؟ مع التعليل ؟

- اقترح تعديلاً لتصبح الدالة المفروضة ذ ت م على الفترة المذكورة (أيضاً دون ذكر حل).

(ج) اذكر دالتان متزايدتان ومحدودتان على فترة مغلقة ومحدودة بحيث يكون الفرق بينهما دالة ذ ت م عليها ، وما هي مجموعة نقاط انقطاعها ، وما هو قياسها حسب لبيغ ؟ ولماذا ؟

السؤال الثاني (50 درجة) :

(1) تأكد من وجود تكامل ستيلجس التالي :

$$J = \int_0^3 \arctan x \, d(8x)$$

وفي حال وجوده ، احسب قيمته عندئذ.

(2) اكتب صيغة الدالة λ^* (قاعدة الربط) مع ذكر كل الشروط التي تكون معها هذه الدالة قياساً خارجياً على مجموعة تعريفها ، ثم أثبت صحة أول شرطين فقط من هذه الشروط.

(3) متى نقول عن قياس أنه منته ، σ- منته – ثم وضح أن قياس لبيغ λ في المجموعة R هو σ- منته من أجل المجموعات :

$$E_n =]-n, -n+1[\cup]n-1, n[\quad ;n = 1,2,...$$

(4) – ليكن لدينا صف المجموعات وحيدة العنصر : $\mathcal{A} = \{\{x\} ; \ x \in R\}$ والمطلوب :

هل هذا الصف جبراً ؟ ولماذا ؟ علماً أنه تبولوجياً وما العلاقة بين الجبر و التبولوجيا ؟

- بين أن كل مجموعة وحيدة العنصر مثل $\{y\}$ في R هي بورلية ، وهل هي لوبيغيه ؟ وما هو قياسها في هذه الحالة ؟

(5) بين فيما إذا كانت المجموعة :

$$I = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ x \ ; \ \frac{1}{k+1} \le x < \frac{1}{k} \right\}$$

مقيسة حسب مفهوم لبيغ ، وما هو قياسها إن كانت مقيسة ؟ مع أن مجموعاتها منفصلة مثنى مثنى.

S (Hi)

لدينا $g_n(x)$ قابلة للاشتقاق على $[0,1]$ و $n \geq 1$

$g'_n(x) = n x^{n-1}$; $|g'_n(x)| = n|x^{n-1}| \leq n$; $\forall n \geq 1$

المشتقة موجودة ومحدودة فهو ذو تغيرات محدودة

لدينا: $g_n(x)$ تابع متزايد على $[0,1]$ فإن المشتقة موجبة على $[0,1]$

$$V_0^1(g_n) = g_n(1) - g_n(0) = 1 - 0 = 1 \Rightarrow V_0^1(g_n) \leq 1 ; \forall n \geq 1$$

وبالتالي شروط المبرهنة محققة أي أن الأسرة محدودة

إذاً صح

دورة تكميلية 2010/2011

5

A- أوجد دالة التغير للدالة $g(x) = x^3$ على $[1,4]$ ثم أثبت أن الدالة الناتجة ذات تغيرات محدودة على تلك الفترة، وهل هي مستمرة إذا كانت g مستمرة؟ مع التعليل.

الحل:

$g'(x) = 3x^2$; $\forall x \in]1,4[$

$|g'(x)| = 3|x|^2 \leq 3(4)^2 = 48$; $\forall x \in]1,4[$

إذاً $g(x)$ ذو تغيرات محدودة (قابلة للاشتقاق ومشتقة محدودة)

بما أن $g'(x) > 0$ فإن $g(x)$ متزايد حسب مبرهنة:

$$V_g(x) = V_1^x(g) = g(x) - g(1) = x^3 - 1$$

ولإثبات أن $V_g(x)$ ذو تغيرات محدودة:

$|[V_g(x)]'| = |3x^2| \leq 48$; $\forall x \in]1,4[$

والمشتق موجود ومحدود وبالتالي ذو تغيرات محدودة

نعم هي دالة مستمرة لأن:

إذا كانت x نقطة من $[1,4]$ فإن $g(x)$ مستمرة عند هذه النقطة حسب مبرهنة (إذا كان $g(x)$ مستمر عند x_0 فإن $V_g(x)$ مستمر عند هذه النقطة)

$V_g(x)$ مستمر عند x ...

$V_g(x)$ مستمر عند كل نقاط المجال $[1,4]$ وهذه مستمرة على مجال التعريف

11

1

ملاحظة: إن الدالة $h(x)$ مستمرة على $[0,1]$ وقابلة للاشتقاق عليه، أي أنها باستثناء [illegible] من النقاط (باستثناء) عدد منته من النقاط (بالا تحول) وعندئذ h يكتب بالشكل

$$h(x) = h(0) + \int_0^x h'(t)\,dt$$

رسم أنها دالة على c

أي أنها تكتب بالصورة $g(x) = c + \int_a^x \varphi(t)\,dt$ وبالتالي التغير الكلي هو

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(g) = \int_a^b |\varphi(t)|\,dt$$

$$V_h(x) = \overset{x}{\underset{0}{V}}(h) = \int_0^x |h'(t)|\,dt = \int_0^x |-2t|\,dt$$

$$= \int_0^x 2t\,dt = t^2 \Big|_0^x = x^2$$

لنفرض أن $V_h(x)$ تحقق شرط ليبشتز على $[0,3]$ البرهان:

$$|V_h(x) - V_h(y)| = |x^2 - y^2| = |x+y|\,|x-y|$$

$$\leq (|x| + |y|)\,|x-y| \leq (3+3)\,|x-y| = 6\,|x-y|$$

وذلك أياً كان $x, y \in [0,3]$ وبالتالي شرط ليبشتز محقق بالثابتة $L = 6$

وبما أن $V_h(x)$ تحقق شرط ليبشتز فهي مستمرة مطلقاً. (مبرهنة)

D- ليكن $g_n(x) = x^n \,;\, n \in \mathbb{N}$ والدالة $f(x) = e^x$ حيث $x \in [0,1]$ والمطلوب هل تصح المساواة:

$$\lim (S)\int_0^1 f(x)\,dg_n(x) = (S)\int_0^1 f(x)\,dg(x)$$

حيث

$$g(x) = \lim_{n \to \infty} g_n(x)$$

الحل: الدالة $f(x) = e^x$ مستمرة على $[0,1]$ [illegible]
كل حدود المتتالية المعطاة متقاربة [illegible]

$$g(x) = \lim_{n \to \infty} g_n(x) = \Big\{ \; [illegible]$$

ج- أوجد دالة التغير للدالة $h(x) = 1 - x^2$ على $[0,3]$

ثم بين أن دالة التغير تحقق شرط ليبشتز وأنها مستمرة مطلقاً على $[0,3]$.

الحل:

$$|h'(x)| = |-2x| = 2x \leq 6 \; ; \; \forall x \in]0,3[$$

الدالة $h(x)$ دالة قابلة للاشتقاق على $]0,3[$ ولها مشتقة محدودة فهي ذات تغيرات محدودة

بما أن $h'(x) \leq 0 \; ; \; \forall x \in]0,3[$ فإن $h(x)$ تناقصية على $[0,3]$

وعليه فإن

$$V_h(x) = \overset{x}{\underset{0}{V}}(g) = h(0) - h(x) = x^2$$

$$J = (S)\int_a^b f(x)\, dg(x) = \int_a^b f(x) g'(x)\, dx + f(a)[g(a+0) - g(a)] + \sum_{k=1}^{n} f(c_k)[g(c_k+0) - g(c_k-0)] + f(b)[g(b) - g(b-0)]$$

$$J = (S)\int_1^4 x^2\, dg(x) = \int_1^4 x^2 g'(x)\, dx + f(1)[g(1+0) - g(1)] + f(2)[g(2+0) - g(2-0)] + f(4)[g(4) - g(4-0)]$$

$$= \int_1^2 x^2 \cdot 1\, dx + \int_2^4 x^2 (2x)\, dx + 1^2[1-1] + 2^2[4-2] + 4^2[17-16]$$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 + \frac{x^4}{2}\Big|_2^4 + 8 + 16$$

$$= \frac{7}{3} + 120 + 24 = 146 + \frac{1}{3}$$

$|g'(x)| = |2x\cdot\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}|$

$\leq |2x\cos\frac{1}{x}| + |\sin\frac{1}{x}| = 2|x|\cdot|\cos\frac{1}{x}| + |\sin\frac{1}{x}|$

$\leq 2|x| + 1 \leq 2(1)+1 = 3 ; \forall x \in [0,1]$

$|g'(0)| = 0$

نستنتج أن $|g'(x)| \leq 3$ أياً كانت $x \in [0,1]$ وحسب مبرهنة
يحقق $g(x)$ ذ.ت.م على $[0,1]$

B- لتكن لدينا الدالة $f(x) = x^2$ ولتكن $g(x)$ الدالة المعرفة بـ:

$$g(x) = \begin{cases} x ; & x \in [1,2[\\ 3 ; & x = 2 \\ x^2 ; & x \in]2,4[\\ 16 ; & x = 4 \end{cases}$$

والمطلوب هل $J = (S)\int_1^4 f(x)\,dg(x)$ موجود ثم أحسب في حال وجوده
الحل: إن التابع $g(x)$ ذ.ت.م لأن:

$$g'(x) = \begin{cases} 1 ; & x \in]1,2[\\ 2x ; & x \in]2,4[\end{cases}$$

وبما أن:

$|g'(x)| = 1 ; x \in]1,2[$
$|g'(x)| = |2x| \leq 8 ; x \in]2,4[$ $\Rightarrow$

$|g'(x)| \leq 8 ; \forall x \in]1,4[$

وبالتالي المشتق محدود وعليه
$(g(x)$ ذ.ت.م$)$

لدينا $g(x)$ ذ.ت.م و $f(x) = x^2$ تابع مستمر على $[1,4]$
وبالتالي تكامل ستيلتجس موجود

ونحسب قيمة هذا التكامل من العلاقة:

1

لنختار النقاط $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ نقاط عادية (وهذا ممكن بما أن كل مجال مهما صغر يحوي عدد غير منته من النقاط العادية والغير عادية)

عندئذ يكون $\varphi(\xi_k) = 1$ ونعوض فنجد:

$$S(\int\varphi, g, P) = 18 \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot (x_k - x_{k-1}) = 18(\sqrt{5})$$

لنختار النقاط $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ نقاط غير عادية فيكون: $\varphi(\xi_k) = 0$

$$S(\int\varphi, g, P) = 18 \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot (x_k - x_{k-1}) = 0$$

ومن ثم بأخذ النهاية عندما $\lambda(P) \to 0$ نجد:

$$\lim_{\lambda(P) \to 0} S(\int\varphi, g, P) = \begin{cases} 1 ; & \xi_k \text{ نقاط عادية} \\ 0 ; & \xi_k \text{ نقاط غير عادية} \end{cases}$$

أي أن النهاية غير موجودة وبالتالي التكامل غير موجود

دورة الفصل الثاني 2010/2011

A- لتكن لدينا الدالة

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \cos\frac{1}{x} ; & x \neq 0 \\ 0 ; & x = 0 \end{cases}$$

والمطلوب بين أن هذه الدالة ذات ت م على المجال $[0, 1]$

الحل: لنوجد $g'(x)$

$$g'(x) = 2x \cos\frac{1}{x} + x^2 \left[\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(-\sin\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$g'(x) = 2x \cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x} \ldots$$

$$g'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim x \cos\frac{1}{x} = 0$$

$(5)\ \int_0^8 x^2\, dg(x) = f(0)[g(0+0) - g(0)]$

$+ f(1)[g(1+0) - g(1-0)] + f(3)[g(3+0) - g(3-0)]$

$+ f(8)[g(8) - g(8-0)]$

$= (0)^2[-(-2) - (-2)] + 1^2[0 - (-2)]$

$+ 3^2[2 - 0] + 8^2[7 - 2] =$

$= 2 + 18 + 64(5) = 340$

ج- إذا كانت $\varphi(x)$ هي دالة ديرخليه على $[0, \sqrt{5}]$ فناقش فيما إذا كانت الدالة 3φ قابلة للتكامل بالنسبة للدالة $g(x) = 6x$ على تلك الفترة

الحل: دالة ديرخليه φ هي:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 ; & x \in Q' \cap [0, \sqrt{5}] \\ 1 ; & x \in Q \cap [0, \sqrt{5}] \end{cases}$$

حيث Q مجموعة الأعداد النسبية و $Q' = R \setminus Q$ مجموعة الأعداد غير النسبية

نأخذ التجزئة الاختيارية للفترة $[0, \sqrt{5}]$ وهي:

$P = \{0 = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = \sqrt{5}\}$

نشكل مجموع ستيلتجس للدالة 3φ بالنسبة للدالة g ووفق التجزئة P:

$$S(3\varphi, g, P) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} 3\varphi(\xi_k)[6(x_k) - 6(x_{k-1})]$$

$$= 18 \sum_{k=1}^{n} \varphi(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

حيث ξ_k نقاط اختيارية من الفترات $[x_{k-1}, x_k]$

$$|f(x) - f(y)| = |\sin 2x - \sin 2y|$$

$$= \left|2 \cos \frac{2x+2y}{2} \cdot \sin \frac{2x-2y}{2}\right|$$

$$= 2|\cos(x+y)| \cdot |\sin(x-y)|$$

$$\leq 2 \cdot 1 \cdot |\sin(x-y)| \leq 2|x-y| \; ; \; \forall x, y \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 2|x-y| \; ; \; \forall x, y \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

حيث نعلم من قوانين تحويل المجموع إلى جداء

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2} \cdot \sin\frac{x-y}{2}$$

B- لتكن لدينا الدالة $g(x)$ والمعرفة بالعلاقة:

$$g(x) = \begin{cases} -2 \; ; & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \; ; & 1 < x \leq 3 \\ 2 \; ; & 3 < x < 8 \\ 7 \; ; & x = 8 \end{cases}$$

والمطلوب: 1- بين أن الدالة $g(x)$ محدودة على $[0, 8]$

2- تأكد من وجود تكامل ستيلتجس $J = (S) \int_0^8 x^2 \, dg(x)$ ثم احسب قيمته.

الحل: 1- إن الدالة $g(x)$ قابلة للاشتقاق باستثناء عدد محدود من النقاط (نقاط الانقطاع) وحيث $g'(x) = 0$ محدودة وبالتالي فإن $g(x)$ محدودة

(بطريقة أخرى بملاحظة أن $g(x)$ تابع قفزات منتهي محدود)

2- بما أن $f(x)$ تابع مستمر $f(x) = x^2$ على

[illegible] $[0, 8]$ [illegible] $g(x)$ [illegible] تكامل ستيلتجس

لـ [illegible] بالنسبة لـ $g(x)$ موجود

دورة الفصل الثاني 2011/2012

8- أثبت أن $f(x) = \sin 2x$ تحقق شرط ليبشتز على الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$ وما هي الدالة المحدودة التغير ولماذا؟

قبل البدء بالحل لنثبت أن $|\sin x| \leq |x| ; \forall x \in R$

نعلم أن $|\sin x| \leq 1 ; \forall x$ إذا كانت $x \geq 2\pi$ فإن

$|\sin x| \leq 1 < 2\pi \leq x \Rightarrow \sin x \leq x ; \forall x \geq 2\pi$

لندرس تغيرات $f(x) = x - \sin x$ على المجال $[0, 2\pi]$

$f'(x) = 1 - \cos x , f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, 2\pi$

x	0		2π
	0	+	0
	0	↗	2π

إذاً يكون $f(x) \geq 0 ; \forall x \in [0, 2\pi]$

$\Rightarrow x - \sin x \geq 0 \Rightarrow \sin x \leq x ; \forall x \in [0, 2\pi]$

وبالتالي يكون $\sin x \leq x$; $0 \leq x$

ما هذه العلاقة وإذا كان x سالباً فإن $(-x)$ موجب نعوض في العلاقة السابقة فنجد أن: $\sin(-x) \leq -x ; \forall x \in R^-$

$-\sin x \leq -x \Rightarrow |\sin x| \leq |x| ; \forall x \in R^-$

وكذلك $|\sin x| \leq |x| ; \forall x \in R^+$

ومنه نجد $|\sin x| \leq |x| ; \forall x \in R$

قاعدة هامة: $|\sin \alpha| \leq |\alpha| ; \forall \alpha \in R$

وكذلك: $\ln(1+\alpha) \leq \alpha ; \forall \alpha \in R^+$

[illegible]

$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L |x_1 - x_2| ; \forall x_1, x_2 \in [0, \frac{\pi}{2}]$

حيث L عدد موجب ما

$= -2x - 2\,\text{arctg}\,x \Big|_{-1}^{0} + 2x + 2\,\text{arctg}\,x \Big|_{0}^{3}$

$= -2(0) - 2\,\text{arctg}\,0 + 2(-1) + 2\,\text{arctg}(-1)$

$+ 2(3) + 2\,\text{arctg}\,3 - 2(0) - 2\,\text{arctg}\,0$

$= -2.(0) - 2 - 2.\frac{\pi}{4} + 6 + 2\,\text{arctg}\,3$

$= -2 - \frac{\pi}{2} + 6 + 2\,\text{arctg}\,3$

$= 4 - \frac{\pi}{2} + 2\,\text{arctg}\,3$

السؤال الثالث: $g_n(x) = (1-x)^n$ حيث $n \geq 1$ ، $f(x) = \arcsin\frac{x}{2}$

1) ايجاد $\lim_{n\to\infty} g_n(x)$ على الفترة $[0,1]$.

$g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} (1-x)^n = \begin{cases} 0 & x \in]0,1] \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

صحة تحقق العلاقة: ④ $\lim_{n\to\infty} (s)\int_0^1 f(x)\,dg_n(x) = (s)\int_0^1 f(x)\,dg(x)$

يجب أن تتحقق: $f(x)$ دالة مستمرة على المجال $[0,1]$ ($\arcsin\frac{x}{2}$ مستمرة على $[0,1]$)

و $g_n(x)$ دالة ذ.ت.م. على $[a,b]$ $\quad V_a^b(g) \leq L$

بالإضافة إلى ذلك g_n متقاربة نقطياً من g .

$g_n'(x) = n.(1-x)^{n-1}(-1) = -n(1-x)^{n-1}$ $\quad n \geq 1$, $n-1 \geq 0$

$g_n' = 0 \Rightarrow x = 1$

x	0		1
g_n'		—	
g_n	1	↘	0

الدالة g_n متناقصة (مطردة) إذاً g_n دالة ذ.ت.م. على $[0,1]$

و g_n متقاربة نقطياً من g ،

وبالتالي فالمساواة ④ صحيحة.

دورة 2010/6/12 منهاج الإعداد

السؤال الأول: بفرض f دالة معرفة بالعلاقة $f(x)=e^x+[x]$ في $[-2,2]$:

1) هل f د.ت.م في $[-2,2]$ ولماذا؟

لأن الدالة $f(x)$ تكتب في شكل مجموع دالتين محدودتي التغير ⟸ متغير د.ت.م في $[-2,2]$ [illegible]

$f_1(x)=e^x$ لأنها د.ت.م

$f_1'=e^x$; $f_1'>0$

x	-2		$+2$
f_1'		$+$	
f_1	e^{-2}	↗	e^{2}

⟸ f_1 دالة متزايدة في الفترة $[-2,2]$

$f_2(x)=[x]$

هي دالة متزايدة في $[-2,2]$ فهي د.ت.م في $[-2,2]$

$$[x]=\begin{cases}-2 & -2\le x<-1\\ -1 & -1\le x<1\\ 1 & 1\le x<0\\ 0 & 0\le x<2\\ 2 & x=2\end{cases}$$

2- لتكن $y_1=e^x$ احسب تغير الكلي في $[-2,2]$ ؟

$$V_{-2}^{2}(y_1)=y_1\Big|_{2}-y_1\Big|_{-2}=e^2-e^{-2}$$

3. تأكد من وجود تكامل ستيلجس $J=(S)\int_{-1}^{3}|x|\,d(\ln(1+x^2))$ ؟ احسبه.

نلاحظ أن $f(x)=|x|$ هي دالة مستمرة في $[-1,3]$ [illegible]

لأن $g(x)=\ln(1+x^2)$ ؛ $g'(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$ موجود

$$|g'|=\frac{2|x|}{|1+x^2|}\le\frac{2\cdot 3}{1}=6$$

محدود

g' مستمر وبالتالي فهو تكامل ريمان. وبالتالي فإن تكامل ستيلجس موجود.

$$J=(R)\int_a^b f\cdot g'\,dx=\int_{-1}^{3}|x|\cdot\frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$=\int_{-1}^{0}-x\cdot\frac{2x}{1+x^2}\,dx+\int_{0}^{3}x\cdot\frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$=-2\int_{-1}^{0}\frac{x^2}{1+x^2}\,dx+2\int_{0}^{3}\frac{x^2}{1+x^2}\,dx$$

$$=-2\int_{-1}^{0}\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)dx+2\int_{0}^{3}\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

س٥) - كل دالة تحقق شرط ليبشز تكون مستمرة.

مثال دالة ديريكليه الدالة ولا تحقق شرط ليبشز. لأن : إن الدالة g مستمرة في [0,2] "الجمعية"

خطأ : ليس كل دالة متوسطة في [0,2] لأن

سعلية لا بوريلية "" بوريلية لا تحقق ..

وكل دالة مستمرة في مجموعة مغلقة تكون متوسطة في [0,2].

السؤال الثاني: احسب التكامل $J=\int_0^8 e^x\,dg(x)$

$g(x)=\begin{cases}-1 & 0\le x\le 1\\ 0 & 1<x\le 4\\ 2 & 4<x\le 8\end{cases}$ إن الدالة $f(x)=e^x$ مستمرة في [0,8]. و $g(x)$ تأخذ قيم ثابتة في الفترات [0,1], [1,4], [4,8]

فإن تكامل J ستيلتجس موجود.

$$J=f(0)[g(0+0)-g(0)]+f(1)[g(1+0)-g(1-0)]$$
$$+f(4)[g(4+0)-g(4-0)]+f(8)[g(8)-g(8-0)]$$
$$=e^0[-1-(-1)]+e^1[0+1]+e^0[2-0]+e^8[2-2]$$
$$=0+e+2+0=e+2$$

الصيف ٢٠١٠/١١١٥

ما هو التغير الكلي للدالة $g(x)=[x]$ على الفترة [0,3] واحسب التكامل $(S)\int_0^3 e^x\,d[x]$ بعد التأكد من وجوده.

$$V_0^3([x])=[b]-[a]=[3]-[0]=3-0=3$$

إن الدالة $f=e^x$ هي دالة مستمرة في [0,3]، و الدالة [x] تأخذ قيماً ثابتة في الفترات [0,3] كما هو موضح كالتالي:

$$[x]=\begin{cases}0 & 0\le x<1\\ 1 & 1\le x<2\\ 2 & 2\le x<3\\ 3 & x=3\end{cases}$$

إن تكامل ستيلتجس موجود.

$$J=f(0)[g(0+0)-g(0)]+f(1)[g(1+0)-g(1-0)]+f(2)[g(2+0)$$
$$-g(2-0)]+f(3)[g(3)-g(3-0)]$$
$$=e^0[0-0]+e[1-0]+e^2[2-1]+e^3[3-2]$$
$$=\dots e+e^2+e^3$$

برهان: g دالة ذات مشتق في [1,3] لدينا:

$$g' = \begin{cases} 2(x-2)\sin\frac{1}{x-2} + (x-2)^2 \cdot \frac{-1}{(x-2)^2}\cos\frac{1}{x-2} & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$$

$$g'\Big|_{x=2} = \lim_{h\to 0} \frac{g(h+2)-g(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin\frac{1}{h} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} h \cdot \sin\frac{1}{h} = 0$$

(صفرية × محدودة)

$$|g'| = \left| 2(x-2)\sin\frac{1}{x-2} - \cos\frac{1}{x-2} \right|$$

$$\leq 2|x-2| \left|\sin\frac{1}{x-2}\right| + \left|\cos\frac{1}{x-2}\right|$$

$$\leq 2|x-2| \cdot \frac{1}{|x-2|} + 1 = 2+1 = 3$$

نلاحظ أن المشتقة محدودة بالدالة والنتيجة في [1,3]
وبالتالي حسب المبرهنة السابقة فإن المساواة * صحيحة.

دورة 20/9/2010

بيّن أن الدالة $g(x) = x - x^2$ تحقق شرط ليبشتز في الفترة [0,2] وهل يمكن أن تكون مستمرة مطلقاً ومتجانسة في تلك الفترة؟ وضّح ذلك.

الحل: شرط ليبشتز

$$|f(x)-f(y)| \leq L \cdot |x-y|$$

$$|x - x^2 - y + y^2| = |(y^2 - x^2) + (x-y)| \leq |y^2 - x^2| + |x-y|$$

$$\leq |y-x| \cdot |y+x| + |x-y| = |x-y|(|y+x| + 1)$$

$$\leq |x-y|(|y| + |x| + 1) \leq |x-y|(2+2+1) = 5|x-y|$$

أي وجد عدد L=5 يحقق الشرط السابق

السؤال الثالث: $\varphi_n(x) = x.e^{-nx}$ متتالية من الدوال معرفة ع $[1,3]$

$$g(x) = \begin{cases} (x-2)^2 \sin\frac{1}{x-2} & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$$

1) أوجد $\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty} x.e^{-nx} = x.e^{-(\infty)x} = x.e^{-\infty} = x.0 = 0$$

2) بين مع التعليل أن المساواة الآتية صحيحة

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^3 \varphi_n(x)\, dg(x) = \int_1^3 \varphi(x) . dg(x) \quad (*)$$

حسب مبرهنة التقارب المنتظم وتقارب ستيلجس أنه إذا كانت $\varphi_n(x)$ متتالية من الدوال المستمرة ومتقاربة بانتظام من φ ع $[a,b]$ وكانت g دالة ذ.ت.م ع $[a,b]$ فإنه تتحقق المساواة $(*)$

نلاحظ أن $\varphi_n(x) = x.e^{-nx}$ (عبارة عن دوال مستمرة ع $[1,3]$.

نثبت التقارب المنتظم.

نوجد $\alpha_n = \sup|\varphi_n - \varphi| \; : \forall x \in [1,3]$

فإذا كانت $\alpha_n \to 0$ ($n\to\infty$) كانت φ_n متقاربة بانتظام.

$$\alpha_n = \sup_{x\in[1,3]} |x.e^{-x.n} - 0| = \sup_{x\in[1,3]} |x.e^{-xn}| = \sup_{x\in[1,3]} x.e^{-xn}$$

$$f' = (x.e^{-xn})' = e^{-xn} + x.(-n).e^{-xn} = e^{-xn}(1-nx)$$

$$f' = (x.e^{-xn})' = 0 \Rightarrow nx = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{n}$$

x	0 $\quad \frac{1}{n}$ $\quad 1 \quad 3 \quad \infty$
f'	$+ \quad 0 \quad -$
f	$0 \nearrow \frac{1}{ne} \searrow 0$

$\alpha_n = \frac{1}{ne}$

$n \to \infty \Rightarrow \alpha_n \to 0$

وتقارب φ_n منتظم ...

دورة 2010

إذا أمكن كتابة الدالة g بالشكل: $g(x) = c + \int_a^x \phi(t)\,dt$

حيث أن التكامل $\int_a^b |\phi(t)|\,dt$ موجود ومحدود عندها نثبت أن g محدودة التغير على $[a,b]$ ، احسب الدالة $g(x)=\operatorname{arctg} x$ كما سبق. ثم بين أن $J=(S)\int_0^{\sqrt{3}} x^2\, d\operatorname{arctg} x$ موجود واحسبه

الحل: إن الدالة $g(x)=\operatorname{arctg} x$ تكتب بالشكل التالي:

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt \quad ; \quad c=0 \quad a=0$$

حيث $\phi(t)=\frac{1}{1+t^2}$ مستمرة

$$\int_0^{\sqrt{3}} \left|\frac{1}{1+t^2}\right| dt = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$= \operatorname{arctg} t \Big|_0^{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{3} - 0 = \frac{\pi}{3}$$

نلاحظ أن التكامل $\int_a^b |\phi(t)|\,dt$ موجود ومحدود ⟸

و g دالة محدودة التغير في الفترة $[0,\sqrt{3}]$.

وبما أن: $f(x)=x^2$ دالة مستمرة في المجال $[0,\sqrt{3}]$ فإن $J=(S)\int_0^{\sqrt{3}} x^2\, d\operatorname{arctg} x$ موجود ويتحول إلى ريمان.

$$J=(R)\int_0^{\sqrt{3}} x^2 \cdot \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{g'}\,dx = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{1}{1+x^2}\right) dx = x + \operatorname{arctg} x \Big|_0^{\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{3} + \frac{\pi}{3} - 0 - 0 = \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$$

ملاحظة هامة جداً

$$V_a^b(g) = \int_a^b |\phi(t)|\,dt$$

$$V_0^{\sqrt{3}}(g) = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{3}$$

2010/9/22

$g(x) = \begin{cases} 2x & -1 \le x \le 0 \\ 1 & 0 < x \le 2 \\ 1 - x^2 & 2 < x \le 3 \end{cases}$ حيث $J = (s)\int_{-1}^{3} x^2 dg(x)$ احسب قيمة التكامل

x^2 دالة مستمرة على $[-1, 3]$

$\lim_{x \to 0^+} g = 1 \neq \lim_{x \to 0^-} g = 0 \Rightarrow$ نقطة انقطاع من النوع الأول $c_1 = 0$

$\lim_{x \to 2^+} g = 1 - 4 = -3 \neq \lim_{x \to 2^-} g = 1 \Rightarrow$ نقطة انقطاع من النوع الأول $c_2 = 2$

$\Rightarrow \int_{-1}^{3} x^2 \, dg(x)$ موجود

$J = \int_{-1}^{3} x^2 \cdot g' \cdot dx + f(-1)[g(-1+0) - g(-1)]$

$+ f(0)[g(0+0) - g(0-0)] + f(2)[g(2+0) - g(2-0)]$

$+ f(3)[g(3) - g(3-0)]$

$g' = \begin{cases} 2 & -1 \le x < 0 \\ 0 & 0 < x < 2 \\ -2x & 2 < x \le 3 \end{cases}$

$= \int_{-1}^{0} 2x^2 dx + \int_{0}^{2} x^2 \cdot 0 \cdot dx + \int_{2}^{3} x^2(-2x) dx + 1[-2 - (-2)]$

$+ 0 + 4[(1-4) - 1] + 9[(1-9) - (1-9)]$

$= 2 \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{0} - 2 \frac{x^4}{4}\Big|_{2}^{3} + 4(-3 - 1)$

$= \frac{2}{3}(0 + 1) - \frac{2}{4}(3^4 - 2^4) - 16$

$= \frac{2}{3} - \frac{1}{2}(81 - 16) - 16$

$= \frac{2}{3} - \frac{81}{2} + \frac{16}{2} - 16$

$= -\frac{81}{2} - 8 + \frac{2}{3} = \frac{-81(3) - 48 + 4}{6} = \frac{-243 - 44}{6}$

$= \frac{-287}{6}$

إذا كانت $f_1 = e^x$ معرفة في $[0,2]$ احسب $\int_0^2 f_1(x)\,d\psi(x)$ (s) بعد التأكد من وجوده.

نجد $f_1 = e^x$ دالة مستمرة في المجال $[0,2]$

$$\lim_{x \to 1^-} \psi = 1 \neq \lim_{x \to 1^+} \psi = 1+3=4$$

أي أن $a=1$ هو نقطة انقطاع من النوع الأول للدالة ψ.

وبالتالي حسب الاختبار [5] نجد ستيلتجس موجود.

$J = \int_a^b f_1\, d\psi$ ، f_1 مستمرة في $[a,b]$

و ψ تمتلك نقاط انقطاع من النوع الأول.

$\Leftarrow$ J موجود

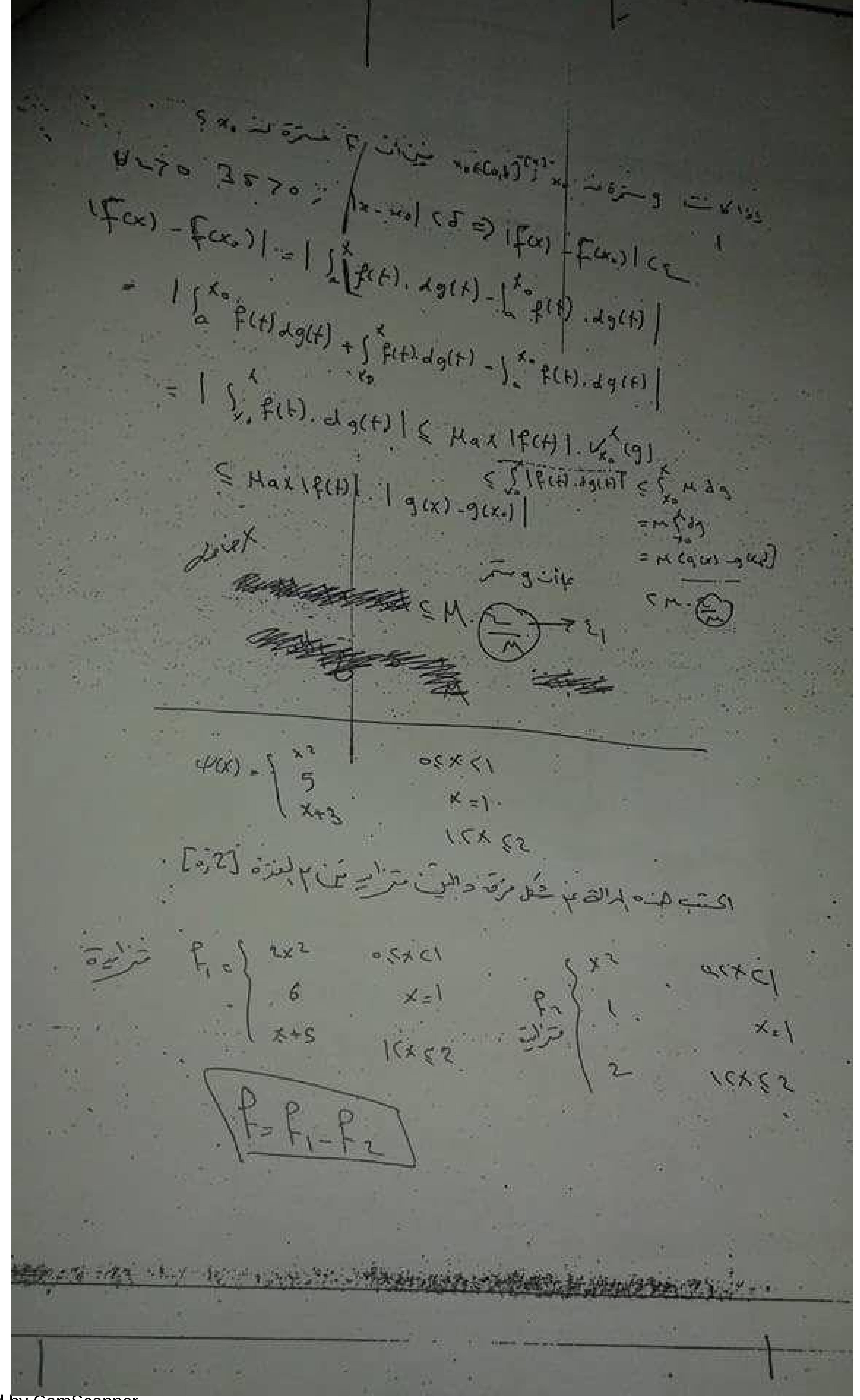
$$J = \int_a^b f_1 \cdot \psi' \, dx + f_1(a)[\psi(a+0) - \psi(a)] + f_1(c)[\psi(c+0) - \psi(c-0)] + f_1(b)[\psi(b) - \psi(b-0)]$$

$$= \int_0^2 e^x \psi' \, dx + f_1(0)[\psi(0+0) - \psi(0)] + f_1(1)[\psi(1+0) - \psi(1-0)] + f_1(2)[\psi(2) - \psi(2-0)]$$

$$\psi' = \begin{cases} 2x & 0 \le x < 1 \\ 1 & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

$$J = \int_0^1 2e^x x \, dx + \int_1^2 e^x dx + e^0[0^2 - 0^2] + e[(1+3) - 1^2] + e^2[(2+3) - (2+3)] = 2e^x(x-1)\Big|_0^1 + e^x\Big|_1^2 + e[4-1] = 2[e(0) - e^0(-1)] + [e^2 - e^1] + 3e = 2[+1] + e^2 - e + 3e$$

$$= 2 + e^2 + 2e$$



بفرض أن g مستمرة عند x_0 ، $x_0 \in [a,b]$ بيّن أن F مستمرة عند x_0 ؟

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \; ; \; |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$|f(x) - f(x_0)| = \left| \int_a^x f(t)\, dg(t) - \int_a^{x_0} f(t)\, dg(t) \right|$

$= \left| \int_a^{x_0} f(t)\, dg(t) + \int_{x_0}^{x} f(t)\, dg(t) - \int_a^{x_0} f(t)\, dg(t) \right|$

$= \left| \int_{x_0}^{x} f(t)\, dg(t) \right| \leq \operatorname{Max} |f(t)| \cdot V_{x_0}^{x}(g)$

$\leq \operatorname{Max} |f(t)| \cdot |g(x) - g(x_0)|$

$\leq \int_{x_0}^{x} |f(t)\, dg(t)| \leq \int_{x_0}^{x} M\, dg$

$= M \int_{x_0}^{x} dg$

$= M\,(g(x) - g(x_0))$

$< M \cdot \frac{\varepsilon}{M}$

لأن g مستمر

[redacted] $\leq M \cdot \frac{\varepsilon}{M} \to \varepsilon_1$

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 5 & x = 1 \\ x+3 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

اكتب φ على شكل فرق دالتين متزايدتين على المجال $[0,2]$.

متزايدة $f_1 = \begin{cases} 2x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 6 & x = 1 \\ x+5 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

متزايدة $f_2 = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \\ 2 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

$f = f_1 - f_2$

ص: هل $\int_0^2 f\, d\phi$ موجود؟

$$f(x)=\begin{cases} x & 0\le x<1 \\ 2 & x=1 \\ x+1 & 1<x\le 2 \end{cases} \qquad \phi(x)=[x]$$

إن الدالة f غير مستمرة عند 1 لأن

$$\lim_{x\to 1^-} f = 1 \neq \lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$$

وبالتالي فإن $\int_0^2 f\, d\phi$ غير موجود.

ص ۳/۲۰۱۸ — دورة ۲۰۰۹/۲۰۱۰

إذا كانت f دالة مستمرة و g دالة محدودة التغير على $[a,b]$. والمطلوب

$$F(x)=\int_a^x f(t)\, dg(t).$$

بين أن $F(x)$ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$.

الحل: يكفي أن نبين أن $V(F,T)$ محدودة من الأعلى لأجل أي تجزئة اختيارية

$$T=\{x_0=a,\dots,x_n=b\}$$

$$V(F,T)=\sum_{k=1}^{n}\left|F(x_{k-1})-F(x_k)\right| = \sum_{k=1}^{n}\left|\int_a^{x_{k-1}} f(t)\,dg(t) - \int_a^{x_k} f(t)\,dg(t)\right| = \sum_{k=1}^{n}\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\,dg(t)\right| \le$$

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t)|\,|dg(t)|$$

بما أن f دالة مستمرة على f كمولة ويانة $\Leftarrow$ f محدودة $\Leftarrow$ $\exists M>0;\ |f|\le M$

$$\Rightarrow\ \le \sum_{k=1}^{n} M\,|g(x_k)-g(x_{k-1})|$$

$$\le M\sum_{k=1}^{n}|g(x_k)-g(x_{k-1})| \le M\cdot V(g,T)$$

$$\le M\cdot \overset{b}{\underset{a}{V}}(g)$$

محدود

وبالتالي فإن $F(x)$ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$.

Scanned by CamScanner

$$f_1 = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 5 & x = 0 \end{cases} \qquad f_2 = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 3 & x = 0 \end{cases}$$

هل ادرس فيما اذا كان $J = \int_{-1}^{4} f_1 \, df_2$ موجود

$$f_1 = \begin{cases} 1 & -1 \le x < 0 \\ 5 & x = 0 \\ 1 & 0 < x \le 4 \end{cases} \qquad f_2 = \begin{cases} 0 & -1 \le x < 0 \\ 3 & x = 0 \\ 0 & 0 < x \le 4 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0^-} f_1 = 1$, $\lim_{x \to 0^+} f_1 = 1$ ولكن $f(0) = 5$

$\lim_{x \to 0^-} f_2 = 0 = \lim_{x \to 0^+} f_2$ وهي $f_2(0) = 3$

اذن f_1, f_2 هما غير مستمرتان عند $x = 0$

فالتكامل غير موجود.

2011/1/17 دورة

احسب قيمة التكامل $\int_0^{\pi} |x| \, d\cos x$ بعد التأكد من وجوده.

$f(x) = |x|$

مستمرة ⇐ كمول ريمان $[0, \pi]$ على

على $[0, \pi]$

$\lim_{x \to x_0} |x| = \lim_{x \to x_0} x = x_0$ مستمرة $\forall x_0 \in [0, \pi]$

$f(x_0) = |x_0| = x_0$

$g(x) = \cos x$

$g'(x) = -\sin x$

$|g'| = |\sin x|$

$\le |x| \le \pi$

اذن g' محدود.

وبما ان $g'(x) = -\sin x$ مستمر ⇐ g كمول ريمان.

$\Rightarrow \int_0^{\pi} f \, dg$ موجود

$$\int_0^{\pi} f \, dg = \int_0^{\pi} |x| \, d\cos x = \int_0^{\pi} -|x| \sin x \, dx$$

$$\int_0^{\pi} x \sin x \, dx = -[x \cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x \, dx$$

$u = x \Rightarrow du = dx$ ⟶ $[\pi(-1)] - [\sin x]_0^{\pi}$

$dv = \sin x \, dx$ ⟶ ....

2

30 of 30

Nour Al-...

[2012 ١١٥١٣٦]

(1)

$g(x) = \sin^4(x) + \cos^4 x$ ... $[0, \pi]$

$g'(x) = 4\sin^3 x[\cos x] + 4\cos^3 x[-\sin x]$

$= 4\sin^3 x \cos x - 4\cos^3 x \sin x$

$g'(x) = 0 \Rightarrow \sin^3 x \cos x - \cos^3 x \sin x = 0 \Rightarrow$

$\cos x \sin x[\sin^2 x - \cos^2 x] = 0 \Rightarrow \cos x \sin x = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\sin 2x = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = \pi k \Rightarrow x = \frac{\pi k}{2}$

$k = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$; $k = 1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{2}}$; $k = 2 \Rightarrow \boxed{x = \pi}$

$g(0) = \sin^4(0) + \cos^4(0) = 0 + 1 = \boxed{1}$

$g(\frac{\pi}{2}) = \sin^4\frac{\pi}{2} + \cos^4\frac{\pi}{2} = \boxed{1}$; $g(\pi) = \sin^4\pi + \cos^4\pi = (-1)^4 = \boxed{1}$

$\sin^2 x - \cos^2 x = 0 \Rightarrow -\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$\cos 2x = 0$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$; $k = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{4}}$; $k = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi + 2\pi}{4} = \boxed{\frac{3\pi}{4}}$

$g(\frac{\pi}{4}) = (\sin\frac{\pi}{4})^4 + (\cos\frac{\pi}{4})^4 = (\frac{\sqrt{2}}{2})^4 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^4 = 2\cdot\frac{(\sqrt{2})^4}{2^4} =$

$\frac{(\sqrt{2})^4}{2^3} = \frac{(2^{\frac{1}{2}})^4}{8} = \frac{2^2}{8} = \frac{4}{8} = \boxed{\frac{1}{2}}$

$g(\frac{3\pi}{4}) = (\sin\frac{3\pi}{4})^4 + (\cos\frac{3\pi}{4})^4$

$\sin\frac{3\pi}{4} = \sin(\frac{\pi}{4} + 2\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\frac{3\pi}{4} = \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow g(\frac{3\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2})^4 + (-\frac{\sqrt{2}}{2})^4 = \boxed{\frac{1}{2}}$

$V_0^{\pi}(g) = V_0^{\pi/4}(g) + V_{\pi/4}^{\pi/2}(g) + V_{\pi/2}^{3\pi/4}(g) + V_{3\pi/4}^{\pi}(g)$

$= |g(\frac{\pi}{4}) - g(0)| + |g(\frac{\pi}{2}) - g(\frac{\pi}{4})| + |g(\frac{3\pi}{4}) - g(\frac{\pi}{2})|$

$+ |g(\pi) - g(\frac{3\pi}{4})| = |\frac{1}{2} - 1| + |1 - \frac{1}{2}| + |\frac{1}{2} - 1| + |1 - \frac{1}{2}| = 2$